Inhaltsverzeichnis

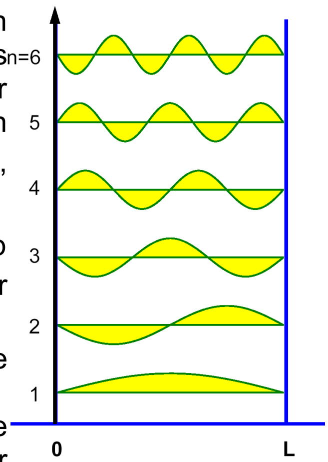
Warum nimmt man so gerne Hohlräume für Strahlungsmessung?

Man betreibt Strahlungsmessungen am liebsten an schwarzen Körpern. Ein schwarzer Körper ist ein Objekt, das alle einfallende Strahlung komplett absorbiert. Die besten Materialien haben Absorptionskoeffizienten von ca. 97%, was bedeutet, dass nur etwa 3% des Lichtes zurückgeworfen werden. Bessere Absorptionskoeffizienten erreicht man mit Hohlräumen: Das einfallende Licht wird mehrmals gespiegelt und es ist unwahrscheinlich, dass es den Hohlraum wieder verlässt.

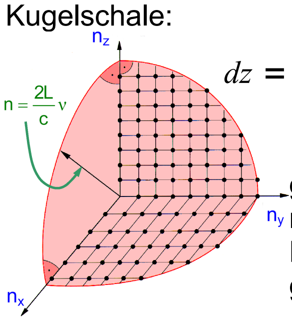
Da nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik die Absorptions- Emissionskoeffizienten gleich sein müssen, absorbieren schwarze Körper nicht nur am meisten Licht, sondern emittieren auch am meisten.

Ableitung des Planck-Gesetzes über Zustandsdichten

Abzählung der Frequenzen



Der Rand eines Hohlraumes besteht aus einem Material mit Elektronen darin, die harmonisch oszillieren können. Daraus ergibt sich, dass das elektrische Feld am Rand des Hohlraumes 0 sein muss. Daher sind für einen eindimensionalen Hohlraum mit der Länge L folgende Wellenlängen möglich: $\lambda = \frac{2L}{n},\ n \in \mathbb{N}$. Wenn unser Hohlraum 3 Dimensionen hat, kann es für n folgende Werte geben: $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = (\frac{2L}{\lambda})^2 =: \rho^2$
Für große n liegen die möglichen Werte sehr dicht beieinander, weshalb wir ins Kontinuum übergehen können und $\rho = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2L}{c} \cdot f$ die Dichte der Zustände beschreibt.
Die Zustandsdichte erhalten wir dann durch Integration über die Kugelschale:



$$dz = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \underbrace{4\pi \left(\frac{2L}{c}\right)^2 f^2 \frac{2L}{c} df}_{Volumen\,der\,Kugelschale} = \frac{8\pi L^3}{c^3} f^2 df$$

wobei die 1/8 daher kommen, dass alle n_x, n_y und n_z positiv sind, weil negative Werte die gleiche Physikalische Situation beschreiben würden und diese nicht mehrfach gezählt werden darf.
Der Faktor 2 dahinter kommt daher, dass es zwei Polarisationsrichtungen gibt.

Hinweis: Obwohl wir bei dieser Herleitung indirekt von einem Würfel ausgehen, sind die in den folgenden Abschnitten hergeleiteten Formeln jedoch allgemeingültig. Eine Herleitung für einen beliebig geformten Körper würde zum gleichen Ergebnis kommen, wäre jedoch um einiges komplizierter.

Energiedichte nach Rayleigh-Jeans

Die spektrale Energiedichte nach Rayleigh-Jeans ist definiert als Frequenzdichte pro Volumen und Frequenzintervall mal der mittleren Energie $\bar{\varepsilon}$ der Schwingungen:

$$U = \frac{dz}{L^3 df} \cdot \bar{\varepsilon} = \frac{8\pi}{c^3} f^2 \cdot \bar{\varepsilon} = \frac{8\pi k T}{c^3} f^2$$

Wobei gilt: $\bar{\varepsilon} = \frac{\int\limits_{E=0}^{\infty} E \cdot e^{\frac{-E}{kT}} dE}{\int\limits_{E=0}^{\infty} e^{\frac{-E}{kT}} dE} = kT$

Wie man hier jedoch erkennen kann, ist die gesamte Energiedichte, die man erhält, wenn man die spektrale Energiedichte über alle Frequenzen integriert, immer unendlich. Dies nennt man „Ultraviolett-Katastrophe“ und ist offensichtlich falsch.

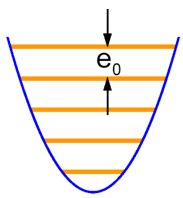
Energiedichte nach Wien

Ein anderer Ansatz des Physikers Wien, der sich für hohe Frequenzen mit seinen Experimenten deckte, war $\bar{\varepsilon} = A f e^{\frac{-Af}{kT}} \Rightarrow U = \frac{8\pi}{c^3} f^3 A e^{\frac{-Af}{kT}}$.

Planck-Gesetz

Erst Planck konnte die Strahlung des schwarzen Körpers zufriedenstellend mit der Annahme erklären, dass die Energie quantisiert ist und $E = n e_0$ ist mit $e_0 := \hbar f$. Dann geht das Integral für die mittlere Energie über in eine Summe:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n e_0 e^{\frac{-n e_0}{kT}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e_0 e^{\frac{-n e_0}{kT}}} = \frac{e_0}{e^{\frac{-n e_0}{kT}} - 1} \Rightarrow U = \frac{2\pi h f^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$



Stefan-Boltzmann-Gesetz

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz erhält man aus dem Planck-Gesetz, indem man die spektrale Energiedichte nach der Frequenz und Fläche integriert:

$\frac{d\omega}{dt} = \sigma A T^4$ wobei A die strahlende Fläche und $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \approx 5{,}6704 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

Strahldichte

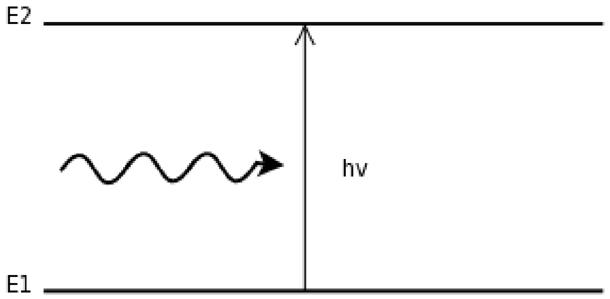
Die Hohlraumstrahlung ist isotrop und homogen. Dies folgt aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik, da man ansonsten ein Perpetuum mobile 2. Art bauen könnte.
Die Strahlungsenergie wird mit Lichtgeschwindigkeit transportiert. Damit kann man folgende Beziehung zwischen der Strahl- und der Energiedichte angeben:

$$L = v \cdot \frac{dU}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} U$$

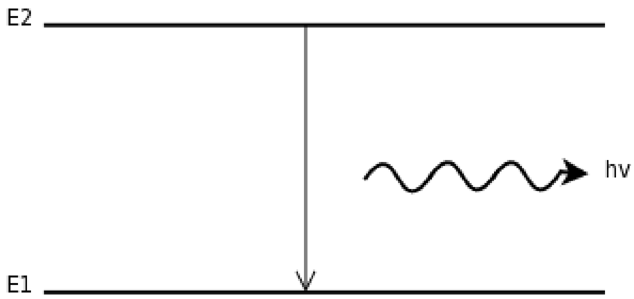
Das Planck-Gesetz laut Einstein

Die Einsteinsche Photonenhypothese geht davon aus das Licht aus Teilchen, den sogenannten Lichtquanten bzw. Photonen besteht.
Diese Photonen besitzen eine Energie: $E=h*\nu$ wobei h das plancksche Wirkungsquantum und ν die Frequenz des Photons ist. Weiterhin wird vorausgesetzt das das Atom diskrete Energieniveaus besitzt, wie von Bohr postuliert.
Zwischen 2 Energieniveaus ($E_{1,}E_2$) mit der Energiedifferenz $E=h*\nu$ existieren dann 3 verschieden Formen des Übergangs ineinander:

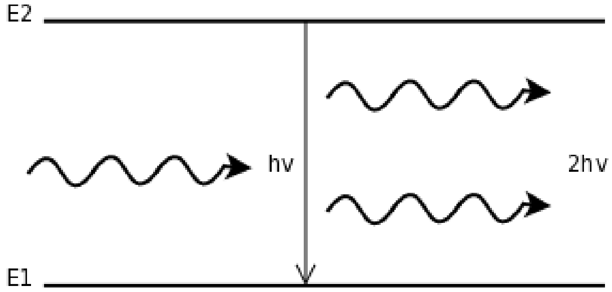
1. **Absorption**: Ein Photon hebt das Elektron vom Zustand E_1 in den Zustand E_2 .



2. **Spontane Emission**: Das Elektron geht spontan vom höheren in den niedrigeren Energiezustand über.



3. **Induzierte Emission**: Ein Photon aus dem Strahlungsfeld erzwingt eine Emission. Dabei kehrt ein Elektron aus dem höheren in einen niedrigeren Energiezustand zurück. Die Energie des Photons muss gleich dem Unterschied der Zustandsenergien sein. Damit werden dann zwei gleiche Photonen emittiert. 1. Aus dem Energieunterschied (spontane Emission) und 2. aus der Anregung.



Wir betrachten nun ein System aus N Atomen in einem schwarzen Körper. Die Anzahl der Elektronen im Zustand E_1 sei N_1, die Anzahl der Elektronen um Zustand E_2 sei N_2. N_1 und N_2 heißen die Besetzungszahlen der Zustände.

Als Teil eines schwarzen Körpers steht das System im Gleichgewicht mit einem elektromagnetischen Feld u(v). Deshalb erfolgen gleich viele Elektronenübergänge von E_1 nach E_2 wie von E_2 nach E_1 pro Zeiteinheit:

$$\frac{E_1 \rightarrow E_2}{Zeit} = \frac{E_2 \rightarrow E_1}{Zeit}$$

Für Übergänge $E_1 \rightarrow E_2$ (Absorption) gilt:
Die $E_1 \rightarrow E_2$ sind proportional zur Energiedichte u(v) und Besetzungszahl N_1 :

$$\frac{E_1 \rightarrow E_2}{Zeit} = B_{12} u(\nu) N_1$$

B_{12} heißt Einsteinkoeffizient und gibt die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs/Zeit an.
Für Übergänge $E_2 \rightarrow E_1$ (spontane&induzierte Emission) gilt:

$$\frac{E_2 \rightarrow E_1}{Zeit} = A_{21} N_2 + B_{21} u(\nu) N_2$$

$A_{21} N2$ ist die Zahl der spontanen Emissionen, $B_{21} u(\nu) N_2$ entspricht der Zahl der induzierten Emissionen.

Auf Grund des thermischen Gleichgewichts ist die Zahl Zahl der Absorptionen gleich der Zahl der Emissionen:

$$B_{12} u(\nu) N_1 = [A_{21} + B_{21} u(\nu)] N_2 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{A_{21} + B_{21} u(\nu)}{B_{12} u(\nu)} \quad (*)$$

Die Verteilung der Teilchen auf die Energieniveaus ergibt sich mit Hilfe der Boltzmann Verteilung:
=> In thermischem Gleichgewicht verhalten sich N_1 und N_2 wie $e^{-E_1/kT} zu\, e^{-E_2/kT}$.

=> $$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_2/kT}} = e^{(E_1 - E_2)/kT} = e^{h\nu/kT} \quad (**)$$

Gleichsetzen von (*) und (**) => $\frac{A_{21} + B_{21} u(\nu)}{B_{12} u(\nu)} = e^{h\nu/kT}$

Auflösen nach u(v): $u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{21}} = \infty \Leftrightarrow \lim_{T\rightarrow\infty} (B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{21}) = 0$

Für $T \rightarrow \infty$ wird $u(\nu) \rightarrow \infty$, der Einsteinkoeffizient A_{21} ist endlich weswegen der Nenner gegen 0 geht.

$$\lim_{T\rightarrow\infty} (\nu) = \frac{\lim_{T\rightarrow\infty} A_{21}}{B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{21}} = \infty \Leftrightarrow \lim_{T\rightarrow\infty} (B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{21}) = 0$$

und wegen : $\lim_{T\rightarrow\infty} (B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{21}) = B_{12} e^0 - B_{21} = B_{12} - B_{21} \Rightarrow B_{12} = B_{21}$

$$\Rightarrow u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{12}} = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{h\nu/kT} - 1} \quad (***)$$

Das Verhältnis der nun verbliebenen Einsteinkoeffizienten erhält man durch Vergleich dieser Formel bei sehr kleinen Frequenzen mit dem Rayleigh-Jeans Gesetz.

Mit der Reihenentwicklung $e^{-E_1/kT} zu\, e^{-E_2/kT}$ können für sehr kleine Frequenzen alle Summanden nach $\frac{h\nu}{kT}$ vernachlässigt werden $\Rightarrow e^{h\nu/kT}=1+\frac{h\nu}{kT}$.

Durch Einsetzen in (***) folgt : $u(\nu)=\frac{A_{21}}{B_{12}(1+\frac{h\nu}{kt}-1)}=\frac{A_{21}}{B_{12}(\frac{h\nu}{kt})}=\frac{A_{21}}{B_{12}}\frac{kT}{h\nu}$.

Woraus nach einem Vergleich mit dem Rayleigh-Jeans Gesetz $\frac{A_{21}}{B_{12}}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$ folgt und daraus die Plancksche Strahlungsformel : $u(\nu)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{h\nu/kT}-1)}$.

Energiedichte des Hohlraumes

Um die gesamte Energiedichte des Hohlraumes zu erhalten integriert man die Plancksche Strahlungsformel über alle Frequenzen:

$$U(T)=\frac{8\pi h}{c^3}T^4\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}}d\nu$$

Substitution: $x:=\frac{h\nu}{kT}$

$$U(T)=\frac{8\pi k^4}{c^3h^3}T^4\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx$$

$$\Rightarrow U(T)=\frac{8\pi^5 k^4}{30c^3h^3}T^4\,mit\,P(T)=\frac{c}{2}AU(T)=P(T)=\sigma AT^4$$

mit $U(T)=\frac{8\pi k^4}{c^3h^3}T^4\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx$ und $P(T)=\frac{c}{2}AU(T)=\sigma AT^4$

und $\sigma=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}=5{,}67*10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}:=Stefan-Boltzmann\ Konstante$

Durchführung des Versuchs

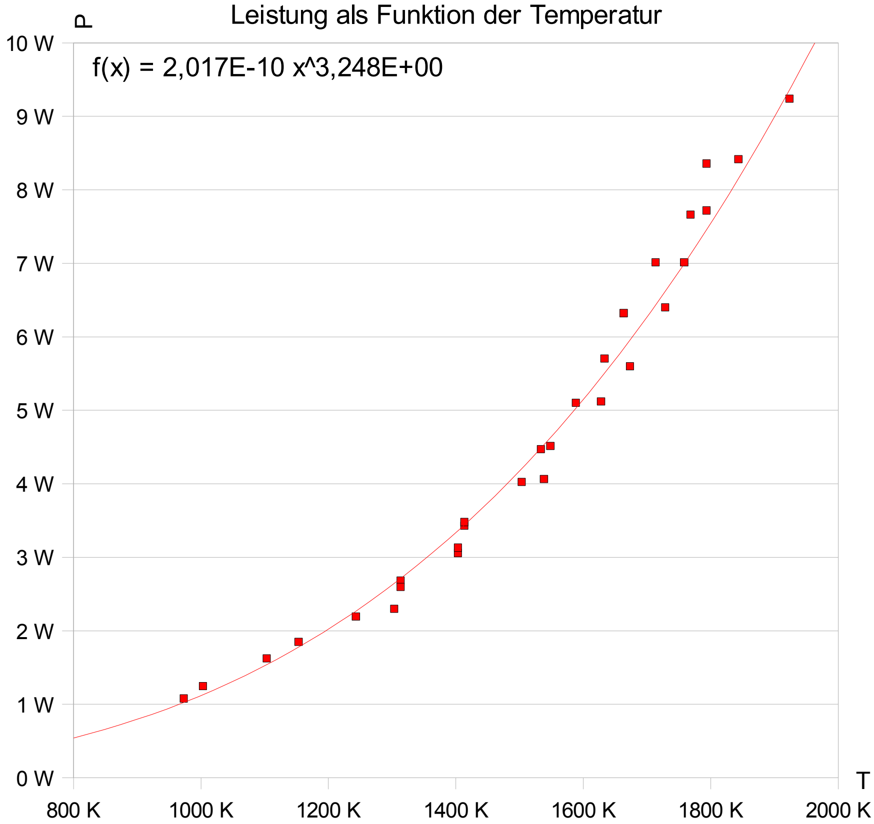
Wie in der Anleitung beschrieben wird in einem Glühfaden-Pyrometer ein Glühfaden zum leuchten angeregt und dessen Leuchtkraft als Referenz für die Temperatur mit der Leuchtkraft der strahlenden Fläche verwendet. Strom und Spannung die am Glühfaden anliegen werden mittels eines Ampere- bzw. Voltmeter gemessen.
Leuchten die beiden Lichtquellen, nach Meinung der durchführenden Person gleich stark, wird auf einer Skala am Pyrometer die Temperatur des strahlenden Glühfadens und die zugehörigen Ampere- bzw. Volt am jeweiligen Messgerät abgelesen.

Bei der anschließenden Auswertung der Messergebnisse muss darauf geachtet werden das mit dem Pyrometer keine tatsächlichen (oder wahren) Temperaturen gemessen werden können sondern nur die Temperatur eines schwarzen Strahlers, welcher so nicht gegeben ist.
Die wahre Temperatur kann anschließend mit Hilfe des Wien'schen Verschiebungsgesetzes berechnet werden.

Beim messen der Werte wird die Stromstärke zunächst nach oben und anschließend nach unten reguliert um eine Ermüdung der Augen zu minimieren.

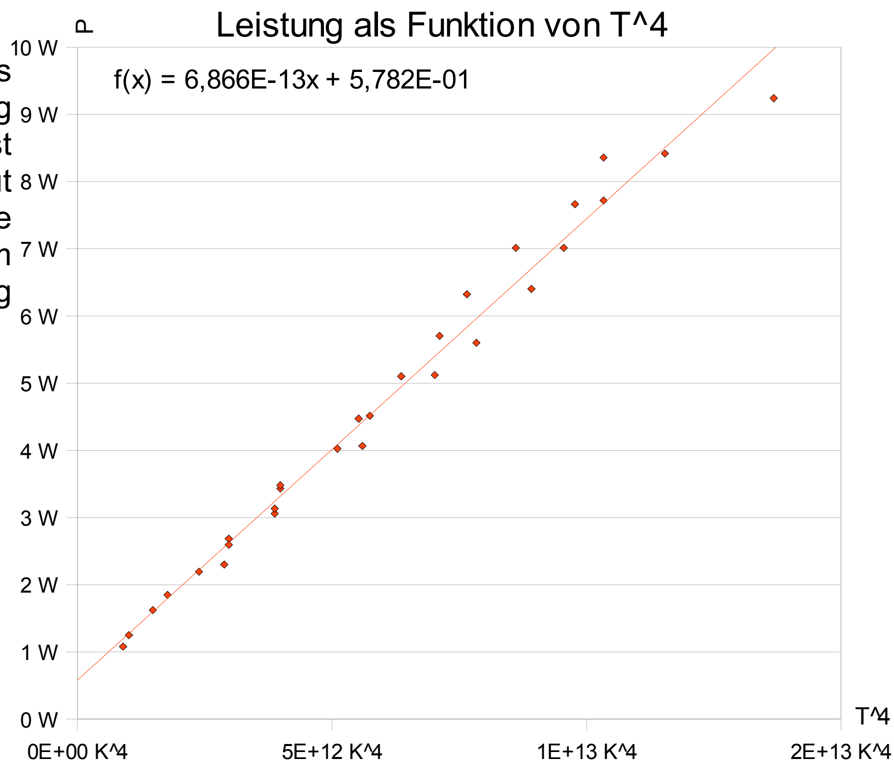
Durch das Messen der Stromstärke und der Spannung lässt sich die Leistung des Glühfadens berechnen die analog zum Stefan-Boltzmann Gesetz eine lineare Abhängigkeit zu T^4 haben sollte. Die Leistung ist hierbei noch um einen Faktor verschoben der die Verlustleistung die durch Temperaturabgabe der Lampe an z.B. den Sockel und andere elektrische Verluste repräsentiert und in der späteren Rechnung berücksichtigt werden muss.

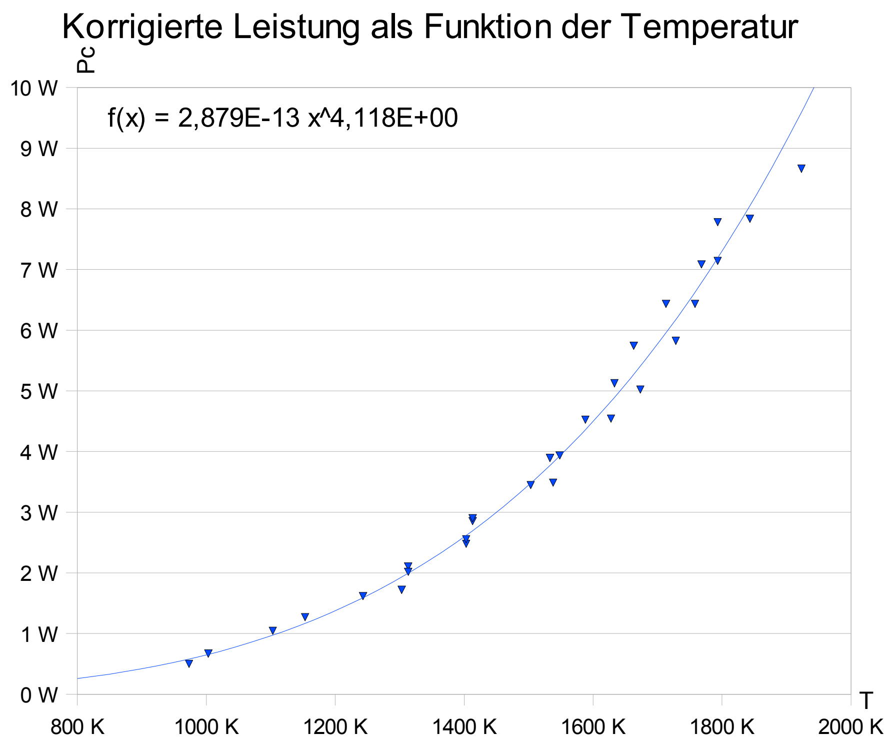
P	T	T^4	P - 0,5782 W
1,079 W	973 K	8,968E+11 K^4	0,501 W
1,249 W	1003 K	1,013E+12 K^4	0,671 W
1,624 W	1103 K	1,481E+12 K^4	1,045 W
1,849 W	1153 K	1,768E+12 K^4	1,271 W
2,195 W	1243 K	2,388E+12 K^4	1,616 W
2,300 W	1303 K	2,884E+12 K^4	1,722 W
2,684 W	1313 K	2,973E+12 K^4	2,106 W
2,596 W	1313 K	2,973E+12 K^4	2,018 W
3,059 W	1403 K	3,876E+12 K^4	2,481 W
3,132 W	1403 K	3,876E+12 K^4	2,554 W
3,432 W	1413 K	3,988E+12 K^4	2,854 W
3,480 W	1413 K	3,988E+12 K^4	2,902 W
4,025 W	1503 K	5,105E+12 K^4	3,447 W
4,472 W	1533 K	5,525E+12 K^4	3,894 W
4,066 W	1538 K	5,598E+12 K^4	3,488 W
4,515 W	1548 K	5,744E+12 K^4	3,937 W
5,103 W	1588 K	6,362E+12 K^4	4,525 W
5,122 W	1628 K	7,018E+12 K^4	4,544 W
5,704 W	1633 K	7,114E+12 K^4	5,126 W
6,322 W	1663 K	7,651E+12 K^4	5,744 W
5,600 W	1673 K	7,837E+12 K^4	5,022 W
7,013 W	1713 K	8,614E+12 K^4	6,435 W
6,402 W	1728 K	8,919E+12 K^4	5,824 W
7,013 W	1758 K	9,555E+12 K^4	6,435 W
7,663 W	1768 K	9,774E+12 K^4	7,085 W
7,719 W	1793 K	1,034E+13 K^4	7,141 W
8,358 W	1793 K	1,034E+13 K^4	7,780 W
8,416 W	1843 K	1,154E+13 K^4	7,838 W
9,240 W	1923 K	1,368E+13 K^4	8,662 W

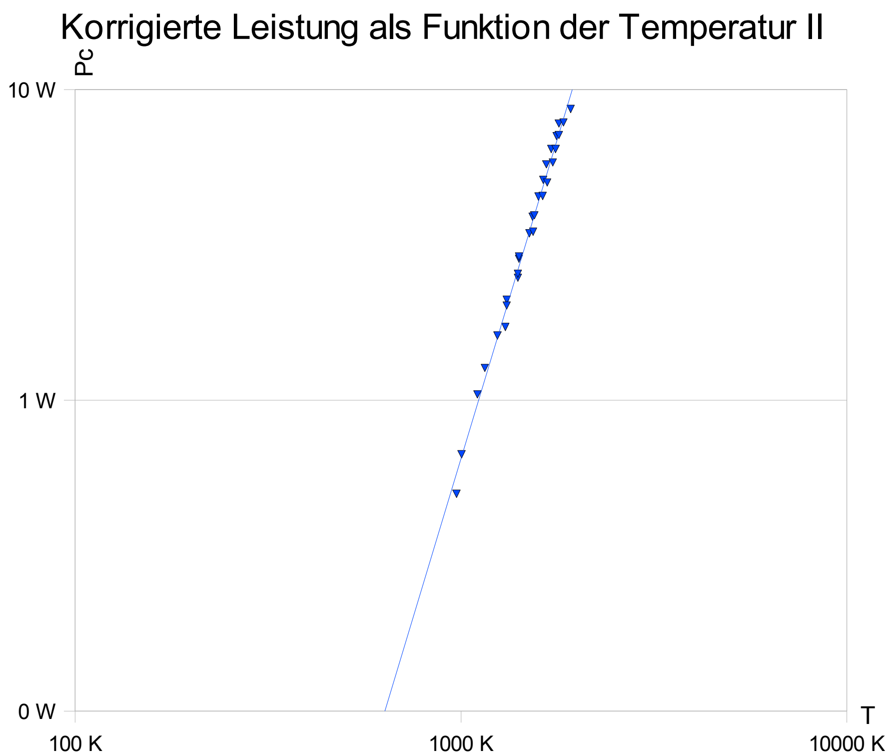


Man kann erkennen, dass es keine Ausreißer gibt. Bei genauerem Betrachten sieht man, dass im mittleren Bereich des Diagramms die meisten Werte unterhalb der Kurve liegen, während an den Rändern das Groß der Werte oberhalb der Kurve liegt. Das deutet darauf hin, dass unsere Parameterdarstellung bzw. die Werte korrigiert werden müssen. Der Exponent liegt bei 3,2 und bestätigt das Stefan-Boltzmann-Gesetz nicht.

Wenn man annimmt, dass 0,5782 W nicht in Strahlung umgesetzt werden, lässt sich das T^4-Gesetz recht gut reproduzieren. Mögliche Ursachen dazu werden im Bereich Fehlerrechnung diskutiert.







Trägt man die Daten doppelt-logarithmisch auf, erhält man eine Gerade und der gesuchte Exponent ist gleich der Steigung.

Ergebnis der Messungen:

Nach Abzug der Verlustleistung von 0,5782 Watt ergibt sich eine $T^{4,118\pm 0,009}$ - Abhängigkeit. Damit liegt die T^4 Abhängigkeit des Stefan-Boltzmann Gesetzes außerhalb einer 13-σ-Umgebung unseres Experimentes und kann daher **nicht bestätigt** werden.

Eine Möglichkeit, diese Diskrepanz zu erklären ist, dass die systematische Verlustleistung doch keine Konstante ist. Der Verlust durch Wärmeleitung ist z.B. proportional zu T, wird aber als Konstant angenommen und nicht weiter berücksichtigt. Eine andere Möglichkeit ist, dass die Abschätzung der Konstante nur eine Näherung ist , die ungenauer als der statistische Fehler des Exponenten ist.

Bestimmung der Wahren Temperatur:

Bei den Beobachtungen wird dem Körper zunächst eine schwarze Temperatur zugewiesen. Wenn man den Absorptionskoeffizienten α und die Wellenlänge des ausgesendeten Lichtes kennt, kann man mit Hilfe des Wienschen Verschiebungsgesetzes die Wahre Temperatur des Strahlers ermitteln:

$$\alpha \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{\frac{-h\nu}{K_B T_W}} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{\frac{-h\nu}{K_B T_S}} \Leftrightarrow T_W = \left(\frac{1}{T_S} + \frac{K_B}{h\nu}\ln(\alpha)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{T_S} + \frac{K_B \lambda}{hc}\ln(\alpha)\right)^{-1}$$

Da α stets kleiner 1 ist, ist $\ln(\alpha) < 0$ und die wahre Temperatur höher als die zugewiesene schwarze Temperatur. Die schwarze Temperatur sollte $1600\ \mathrm{K}$ sein, die Wellenlänge $655\ \mathrm{nm}$ und $\alpha = 0{,}45$. Alle weiteren Konstanten sind bekannt. Damit ergibt sich:

$$T_W = \left(\frac{1}{1600\,K} + \frac{1{,}381\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}\cdot 655\,nm}{6{,}626\cdot 10^{-34}\,Js\cdot 299\,792\,458\,\frac{m}{s}} \underbrace{\ln(0{,}45)}_{=-0{,}7985}\right)^{-1} = \underline{\underline{1699\,K}}$$

Fehlerrechnung:

Bestimmung des Fehlers des Exponenten

LN(T)	LN(P - 0,5782 W)	Steigung	Abweichungsquadrat
6,88	-0,69	4,09624	0,00046
6,91	-0,4	4,12057	0,00001
7,01	0,04	4,12801	0,00011
7,05	0,24	4,12979	0,00015
7,13	0,48	4,11996	0,00001
7,17	0,54	4,10169	0,00026
7,18	0,74	4,12537	0,00006
7,18	0,7	4,11943	0,00000
7,25	0,91	4,11025	0,00006
7,25	0,94	4,11425	0,00001
7,25	1,05	4,12554	0,00006
7,25	1,07	4,12784	0,00010
7,32	1,24	4,11653	0,00000
7,34	1,36	4,12206	0,00002
7,34	1,25	4,10523	0,00016
7,34	1,37	4,11810	0,00000
7,37	1,51	4,12273	0,00003
7,39	1,51	4,10959	0,00007
7,4	1,63	4,12402	0,00004
7,42	1,75	4,12924	0,00013
7,42	1,61	4,10781	0,00010
7,45	1,86	4,12808	0,00011
7,45	1,76	4,10986	0,00006
7,47	1,86	4,11375	0,00002
7,48	1,96	4,12350	0,00003
7,49	1,97	4,11682	0,00000
7,49	2,05	4,12825	0,00011
7,52	2,06	4,11415	0,00001
7,56	2,16	4,10425	0,00018
	Ø =	4,11769	Sqr(Ø) = 0,00898

Den statistischen Fehler des Exponenten T^B erhält man, indem man von jedem einzelnen Wert die korrigierte Leistung durch die Konstante $2{,}879 \cdot 10^{-13}$ teilt, anschließend den Logarithmus bildet und diesen durch den Logarithmus der Temperatur teilt. Das Mittel der einzelnen Werte ergibt den Exponent, die Standardabweichung den bereits oben genannten Fehler von 0,009.

Der Systematische Fehler von 0,5782 W kann z.B. mit Wärmeleitung zusammenhängen, da der Glühfaden nicht nur Leistung über Strahlung, sondern auch über Wärmeleitung an die Umgebung abgibt. Ein anderer Punkt sind parasitäre Widerstände im Schaltkreis z.B. an Verbindungskabeln oder -steckern.